

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Segundo Semestre de 2015

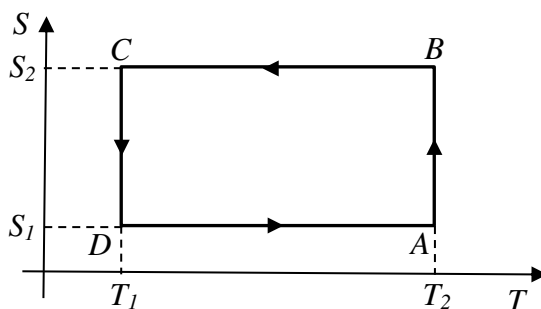
Mecânica Estatística

12/08/2015 - 9h às 12h

(Escolha três dentre as quatro questões.)

QUESTÃO 1: Termodinâmica

n moles de um gás ideal diatômico passam pelas transformações termodinâmicas reversíveis mostradas no diagrama entropia (S) versus temperatura absoluta (T) a seguir.



- a) (10%) Calcule o calor trocado com o ambiente nos processos AB , BC , CD e DA .
- b) (20%) Esboce o diagrama pressão versus volume correspondente, indicando os pontos A , B , C e D e os sentidos das setas. Interprete o seu resultado.
- c) (40%) A partir do conhecimento do volume V_A do gás ideal no ponto A e de T_1 , T_2 , S_1 e S_2 , calcule V_B , V_C e V_D .
- d) (30%) De acordo com o gráfico acima, no processo CD o gás ideal possui variação de entropia negativa. Este fato contraria a 2ª lei da Termodinâmica? Justifique.

QUESTÃO 2: Ensemble canônico

Considere um sistema de N bósons, não interagentes, com apenas 3 possíveis níveis de energia, separados por ϵ (por exemplo 0, ϵ e 2ϵ). O sistema está contido em um volume V em contato com um reservatório à temperatura absoluta T .

a) (30%) Determine a função de partição para uma única partícula ($N = 1$) e determine a energia média por partícula. Mostre que no limite de altas temperaturas, $\langle \epsilon \rangle \sim \epsilon$. Discuta fisicamente este resultado.

b) (30%) Determine a temperatura para a qual o estado fundamental do sistema de partículas é duas vezes mais provável de estar ocupado do que o estado com energia igual a 2ϵ .

c) (40%) Determine a capacidade térmica, C_V , do sistema de partículas. Obtenha C_V nos limites de altas e baixas temperaturas. Esboce um gráfico de C_V em função da temperatura.

QUESTÃO 3: Estatística de Fermi - Gás de Fermi

Em um metal típico como o cobre (que possui densidade de átomos de $8 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$), cada átomo cede um elétron para a banda de condução, que se comporta como um gás de Fermi em 3 dimensões. Considere que a densidade de estados de um gás de Fermi em 3 dimensões é dada por,

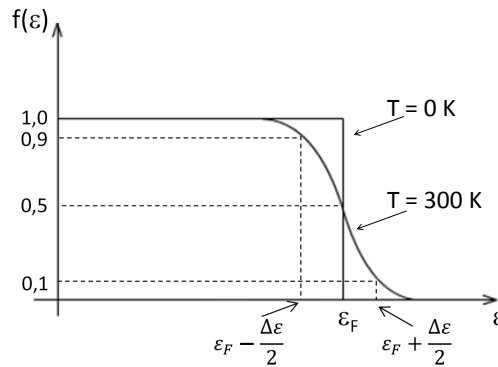
$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2},$$

onde m é a massa efetiva do elétron (considerada como sendo igual à massa do elétron livre m_e).

a) (40%) Determine a energia de Fermi no limite de temperatura $T = 0$. Mostre que o seu valor é da ordem de 6 eV . Sugestão: $N = \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$, onde $f(\epsilon)$ é a distribuição de Fermi-Dirac e N é o número de elétrons por unidade de volume.

b) (30%) Sabe-se que os elétrons que participam da corrente elétrica são aqueles cuja função $f(\epsilon)$ está entre $0,1$ e $0,9$ ($0,1 < f(\epsilon) < 0,9$). Determine o intervalo de energia que ocupado pelos elétrons que participam da corrente elétrica à temperatura de 300 K . Mostre que este intervalo de energia de cerca de $0,1 \text{ eV}$.

c) (30%) Determine o número, N^* , de elétrons que participam da corrente elétrica, na temperatura $T = 300 \text{ K}$. Use a equação: $N^* = \int_{\epsilon_F - \frac{\Delta\epsilon}{2}}^{\epsilon_F + \frac{\Delta\epsilon}{2}} f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon$ e considere que $f(\epsilon) \approx f(\epsilon_F) = 0,5$ e $g(\epsilon) \approx g(\epsilon_F)$. Mostre que $N^* \approx 0,012N$, onde N é o número total de elétrons da banda de condução.



Dados: $\pi \simeq 3$; $h \simeq 6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $\hbar \simeq 1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $m_e \simeq 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,6 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$; para $T = 300 \text{ K}$, $k_B T \simeq 25 \text{ meV}$; $\ln 3 \simeq 1$.

QUESTÃO 4: Sistemas interagentes

Considere o modelo de Ising em uma dimensão cujo Hamiltoniano a campo magnético nulo é dado por

$$\mathcal{H}_0 = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1},$$

onde as N variáveis Ising assumem valores $S_i = \pm 1$, J é uma constante com dimensões de energia e são consideradas condições periódicas de contorno, $S_{N+1} \equiv S_1$.

a) (40%) Calcule a energia livre de Helmholtz por partícula para o Hamiltoniano acima.

b) (20%) Na presença de um campo magnético uniforme H (em unidades convenientes), o Hamiltoniano Ising é dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - H \sum_{i=1}^N S_i.$$

Escreva a função de partição canônica do sistema em termos da expressão

$$P_{S_i, S_{i+1}} = e^{\beta H S_i / 2} e^{\beta J S_i S_{i+1}} e^{\beta H S_{i+1} / 2},$$

onde $\beta^{-1} = k_B T$.

c) (40%) No limite termodinâmico, mostre que a energia livre de Helmholtz por partícula é dada por

$$f(T, H) = -k_B T \ln \lambda,$$

onde λ é o maior autovalor da matriz de transferência 2×2 , de elementos $T_{1,1} = P_{+,+}$, $T_{1,2} = P_{+,-}$, $T_{2,1} = P_{-,+}$ e $T_{2,2} = P_{-,-}$. Determine λ .